Β ΤΕΣΕΚ ΛΕΜΕΣΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2019/2020

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ Γ΄ΕΤΟΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ(7ΩΡΟ)

- **ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x+lnx}{x^3-1}$ (-1/6) β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot e^{\frac{3}{x}}\right)$. (+∞)

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^5+3x^3+4x-10=0$, έχει μόνο μια πραγματική ρίζα.

3. α)Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέσης Τιμής.

β) Να δώσετε την Γεωμετρική ερμηνεία του.

γ) Έστω η συνάρτηση $f(x)=lnx\ , x>0$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ ∈ (x , x+1) , τέτοιο ώστε f΄ (ξ) = ln $(\frac{x+1}{x})$ ii) *Να δείξετε* ότι ισχύει : $\frac{1}{x+1}<\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)<\frac{1}{x}\ ,\ x>0$.

4. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του $Rolle$.

β) Δίνεται η $συνάρτηση\ f\ με\ τύπο\ f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1\ , αν\ -1\le x\le 0 \\ x^3+\beta x^2+2x+\gamma\ ,\quad αν\ 0<\chi\le 1\end{cases}$

Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του $Rolle$, να δείξετε ότι γ=1 και β=-4.

5. Έστω η συνάρτηση $f: R\to R$,$η\ οποία\ είναι\ παραγωγίσιμη\ στο\ R\ \ και\ για\ την\ οποία\ ισχύει\ \ f(x^3)=4f(x)$,$\forall x\in R$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=0\ και\ f(8)=4\,f(2)$

β) Υπάρχουν σημεία $\xi_1\in(0,2)\ \ και\ \xi_2\in(2,8)$, ώστε οι εφαπτομένες της f στα σημεία της με τετμημένες ξ_1 και ξ_2 να είναι παράλληλες.

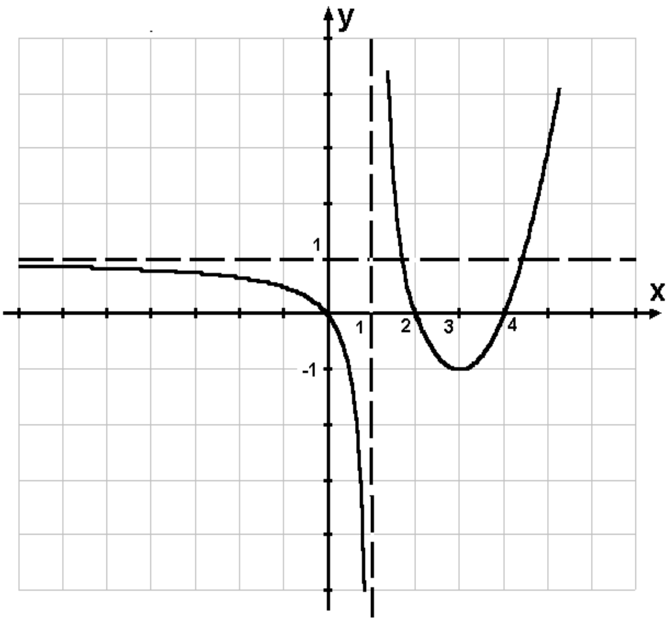
6. Αν το (1,-7) είναι σημείο καμπής της $y=x^4(\alpha\ln x+\beta)$ να υπολογίσετε τα α και β.

7. α) Να δώσετε τον ορισμό της **κατακόρυφης** της **οριζόντιας** και της **πλάγιας** ασύμπτωτης

β) Να βρείτε το Π.Ο και τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

i) $\psi=\frac{3\cdot x^2}{x\ \ -4}$ ii) $\psi=(x-2)\cdot e^{-x}$ iii) $\psi=\frac{\ln x}{x-3}$

8. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $y = f(x)$.



α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύουν :

ι) $f(x) \geq 0$ ιι) $f''(x) < 0$ ιιι) $f'(x) \geq 0$ και $f''(x) > 0$

iv) Η γραφική παράσταση της $f'(x)$ τέμνει τον άξονα των χ

β) Να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ iv) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - \alpha^2}{2\alpha x} - \ln x + \ln \alpha$, $\alpha > 0$, $x > 0$

(α) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

(β) Αν $0 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι $\ln\dfrac{\alpha}{\beta} > \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

(α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού για την f στο διάστημα [0, 1] και αν ισχύουν

να βρείτε το ξ για το οποίο εφαρμόζεται στο (0, 1).

(β) Να δείξετε ότι το Θεώρημα της Μέσης Τιμής δεν ισχύει στο

διάστημα [-2, 0] για την f .

11. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, μονοτονία – ακρότατα , κυρτότητα –Σ.Κ και ασύμπτωτες να παραστήσετε γραφικά

τις πιο κάτω συναρτήσεις.

i) $\psi = \frac{2x^2}{x+1}$ ii) $\psi = \ln(1-2x)$

- **<u>ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>**

<u>ΟΡΙΣΜΟΙ</u>

- Η συνάρτηση $f:\ \psi = \eta\mu x,\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ έχει αντίστροφη συνάρτηση την:

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}:\ \psi = \tau o\xi\eta\mu x \ \Leftrightarrow\ \eta\mu\psi = x \\ \acute{o}\pi o\upsilon\ -1 \le x \le 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

- Η συνάρτηση $f:\ \psi = \sigma\upsilon\nu x,\quad x \in [0, \pi]$ έχει αντίστροφη συνάρτηση την:

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}:\ \psi = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x \ \Leftrightarrow\ \sigma\upsilon\nu\psi = x \\ \acute{o}\pi o\upsilon\ -1 \le x \le 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad 0 \le \psi \le \pi \end{array}}$$

- Η συνάρτηση $f:\ \psi = \varepsilon\varphi x,\quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση την:

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}:\ \psi = \tau o\xi\varepsilon\varphi x \ \Leftrightarrow\ \varepsilon\varphi\psi = x \\ \acute{o}\pi o\upsilon\ x \in R \quad \kappa\alpha\iota \quad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

- Η συνάρτηση $f:\ \psi = \sigma\varphi x,\quad x \in (0, \pi)$ έχει αντίστροφη συνάρτηση την:

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}:\ \psi = \tau o\xi\sigma\varphi x \ \Leftrightarrow\ \sigma\varphi\psi = x \\ \acute{o}\pi o\upsilon\ x \in R \quad \kappa\alpha\iota \quad 0 < \psi < \pi \end{array}}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΘΗΣΕΩΝ

- $(\tau o\xi \eta\mu x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad [\tau o\xi \eta\mu\, f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

- $(\tau o\xi \sigma\upsilon\nu x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad [\tau o\xi \sigma\upsilon\nu\, f(x)]' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$

- $(\tau o\xi \varepsilon\phi x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad [\tau o\xi \varepsilon\phi\, f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

- $(\tau o\xi \sigma\phi x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad [\tau o\xi \sigma\phi\, f(x)]' = -\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

Α . *Να βρείτε τις παραγώγους των πιο κάτω:*

1) y = τοξ ημ (2x-1) 2) y = τοξ συν (2x+3) 3) y = x τοξ ημx

4) y = τοξ εφ (e^{2x}) 5) y = τοξ συν (e^{x+1}) 6) y = τοξ εφ (x^2 + 1)

7) y = xτοξ ημx + $\sqrt{1-x^2}$ 8) y = (τοξ εφ 2x $)^2$ 9) y = $\sqrt{1-x^2}$ - x τοξ συνx

Β. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tau o\xi\varepsilon\phi\chi}{2\chi^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x-\tau o\xi\eta\mu\chi}{\eta\mu\chi}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tau o\xi\varepsilon\phi\chi+x}{\tau o\xi\sigma\upsilon\nu\chi-\frac{\pi}{2}}$

Γ. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

1) ημ (τοξ εφ $\frac{3}{4}$) 2) συν (2 τοξ σφ $\frac{12}{5}$)

3) εφ (τοξ ημ $\frac{5}{13}$) 4) συν ($\frac{\pi}{2}$ - τοξ εφ $\frac{7}{24}$)

Δ. 1) Αν y = ημ (lnx) $\Rightarrow x^2 \dfrac{d^2\psi}{dx^2} + x\dfrac{d\psi}{dx} + \psi = 0$

2) Να βρείτε τα ακρότατα του y = τοξ εφ x – ln $\sqrt{1+x^2}$

3) α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση y = τοξ ημx+ τοξ συνx, $-1 \le x \le 1$ είναι σταθερή και να βρείτε τη τιμή της.

β. Το ίδιο για τις συναρτήσεις y = τοξ εφ2x+ τοξ εφ $\dfrac{1}{2x}$

y = τοξ εφx + τοξ σφx

- **ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ**

Βασικά αόριστα ολοκληρώματα:

1. $\int 1dx = \int dx = x + c$
2. $\int x^{\nu} dx = \dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + c$ ν≠-1
3. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \quad 0 < a \neq 1$
6. $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$
8. $\int \tau\varepsilon\mu^2 x dx = \varepsilon\varphi x + c$
9. $\int \sigma\tau\varepsilon\mu^2 x dx = -\sigma\varphi x + c$
10. $\int \tau\varepsilon\mu x \varepsilon\varphi x dx = \tau\varepsilon\mu x + c$
11. $\int \sigma\tau\varepsilon\mu x \sigma\varphi x = -\sigma\tau\varepsilon\mu x + c$
12. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{T}o\xi\eta\mu x + c$
13. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{T}o\xi\varepsilon\varphi x + c$

Βασικοί τύποι ολοκληρωμάτων

1. $\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(ax+\beta)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+\beta) + c$

2. $\int f^{\nu}(x).f'(x)dx = \dfrac{f^{\nu+1}(x)}{\nu+1} + c, \quad \nu \neq -1,$ $\quad \int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

3. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

4. $\int \varepsilon\phi x dx = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c = \ln|\tau\varepsilon\mu x| + c$

5. $\int \sigma\phi x dx = \ln|\eta\mu x| + c$

6. $\int \tau\varepsilon\mu x dx = \ln|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\phi x| + c$

7. $\int \sigma\tau\varepsilon\mu x dx = -\ln|\sigma\tau\varepsilon\mu x + \sigma\phi x| + c$

8. $\int u d\nu = u\nu - \int \nu du$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $\int \left(5x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} + e\right) d\chi$

2. $\int \eta\mu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2x \cdot dx$

3. $\int (\sigma\phi^2 x + \eta\mu^2 x - e^{-x})\, dx$

4. $\int e^{2\chi} \cdot \sigma\upsilon\nu 3x \cdot d\chi$

5. $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sqrt{2 - \varepsilon\phi x}}$

6. $\int \frac{\eta\mu 2x \cdot dx}{(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x)}$

7. $\int \frac{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}{\mathrm{x}^4} \mathrm{dx}$, $\mathrm{x} = \eta\mu\theta$ $\quad 0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$.

8. $\int \frac{\ln x}{(x-1)^3} dx$

9. Αν $f'(\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi - \chi\eta\mu\chi$ και $f(\frac{\pi}{3}) = 2 \cdot f(0)$ να βρείτε την $f(\chi)$

10. Αν $I_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x\, dx$, να δείξετε ότι $I_\nu = \frac{\varepsilon\phi^{\nu-1} x}{\nu - 1} - I_{\nu-2}$, $\forall \nu \geq 2$