

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΜΗΜΑΤΑ/ΣΥΝΔΙΔΑΣΚΑΛΙΕΣ: ΒΟΜ7α, ΒΟΜ7β

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Αντωνίου Χριστιάνα, Φοινίκεττος Γιάννης

ΑΛΓΕΒΡΑ1. Να δείξετε με την μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ):

$$(\alpha) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(\beta) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \frac{x-1}{|2x-1|-5} \quad (\beta) f(x) = \frac{\sqrt{|x|-2}}{x-5}$$

3. Να βρείτε ποιες από τις πιο κάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, ποιες είναι περιττές και ποιες δεν είναι τίποτε:

$$(\alpha) f(x) = 2x^7 - 3x^{11} \quad (\beta) f(x) = x^3 - 2x^5 - 8 \quad (\gamma) f(x) = \sin x + \varepsilon \varphi x$$

$$(\delta) f(x) = x^3 \eta \mu x \quad (\epsilon) f(x) = \frac{10^x}{4^x + 25^x} \quad (\sigma\tau) f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right), x \in (-2, 2)$$

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f: A \rightarrow f(A)$  με τύπο  $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ . Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης  $f^{-1}(x)$ .5. Δίνεται η συνάρτηση  $f: A \rightarrow f(A)$  με τύπο:  $f(x) = \frac{x+5}{x-2}$ ,  $x > 4$ 

(α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ . Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.6. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  με τύπο  $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ .

(α) Να δείξετε ότι είναι περιττή.

(β) Να δείξετε ότι είναι ένα προς ένα και επί.

(γ) Αν είναι αντιστρέψιμη, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της.

7. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = 2^{\sin^2 x - \eta \mu^2 x}$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  είναι 1-1.8. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 - 1$  και  $g(x) = \sqrt{3-x}$ . Να ορίσετε την συνάρτηση  $g \circ f$ .9. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  και  $g(x) = \frac{3x}{x+1}$ . Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης  $f \circ g$ .10. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 3x - 2$ ,  $x > 1$  και  $g(x) = \sqrt{x-4}$ . Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της  $g \circ f$ .11. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $g(x) = x^2 - 6x + 10$ .

12. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$     β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \eta \mu x}{x \sigma \nu \nu x}$     γ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+7}{1-x-x^2}$

δ)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{|x^2-3x+2|}$     ε)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}$     στ)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$     ζ)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta \mu x}{x^2+1}$

13. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: A \rightarrow f(A) \text{ με τύπο } f(x) = \frac{-2x}{2-x} \text{ και } g: B \rightarrow g(B) \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

β) Να δείξετε ότι αντιστρέφεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  και να γράψετε τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

γ) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:  $f+g$  και  $\frac{f^{-1}}{f}$

δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση:  $f \circ g$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{25-x^2}$  και  $g(x) = \sqrt{x+5}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(i)  $\frac{f}{g}$

(ii)  $g^2$

γ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση  $f \circ g$  και αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο.

15. (α) Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu \nu 2x-1}{x^2}$ .

(β) Να εξετάσετε αν η πιο κάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο της με  $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{4}, & x \geq -1 \\ \frac{x+1}{|-x^2+2x+3|}, & x < -1 \end{cases}$$

16. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-1}, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο 0, να βρείτε το σύνολο τιμών της.

17. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\chi^2 + 2\sigma \nu \nu(\pi \chi) = 0$  έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα  $[0, 1]$ .

18. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι 4 και ο πέμπτος όρος είναι τριπλάσιος του δεύτερου όρου. Να σχηματίσετε την πρόοδο.

19. Δίνεται η ακολουθία  $a_n = 3n + 1, n \in \mathbb{N}$ .
- (α) Να δείξετε ότι είναι κάτω φραγμένη.  
 (β) Να δείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος.  
 (γ) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της Τέλειας Επαγωγής να αποδείξετε ότι το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο  $\Sigma_n = \frac{3n^2 + 5n}{2}$ .
20. Δίνεται η πρόοδος  $7, 10, 13, 16, \dots$  Να βρείτε:
- (α) το είδος της προόδου,  
 (β) τον όρο  $a_{30}$  (με τύπο),  
 (γ) το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου (με τύπο).
21. Δύο γεωμετρικές πρόοδοι έχουν τον ίδιο πρώτο όρο  $a_1$  και αντίθετους λόγους  $\lambda$  και  $-\lambda$  αντίστοιχα. Οι όροι μιας τρίτης γεωμετρικής προόδου είναι ίσοι με τα τετράγωνα των όρων της πρώτης. Αν  $S_1, S_2, S_3$  είναι τα αθροίσματα των  $n$  πρώτων όρων της πρώτης, δεύτερης και τρίτης προόδου αντίστοιχα, να δείξετε ότι αν το  $n$  είναι περιττός αριθμός, τότε  $S_1 \cdot S_2 = S_3$ .
22. Αν οι αριθμοί  $\ln\left(\frac{7}{3} + 10 \cdot 3^x\right), \ln\sqrt{88 + 3^{x+1}}, \ln 3$  είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου, να υπολογίσετε την τιμή του  $x$ .
23. Φθίνουσα αριθμητική πρόοδος με διαφορά  $\delta$  και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο  $\lambda$ , έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με  $\frac{2^{15}}{2}$  και το άθροισμα των άπειρων όρων της ισούται με 108. Αν ισχύει η σχέση  $\log_2(48\lambda) = -\delta$ , να βρείτε:
- α) τις δύο προόδους  
 β) το άθροισμα όλων των θετικών όρων της αριθμητικής προόδου.
24. Να λύσετε τις εξισώσεις:
- (α)  $2^{x^2} = 16$   
 (β)  $2^{x+1} + 3 = 2^{1-x}$   
 (γ)  $\log(2-x) + \log(x+3) = \log 4$   
 (δ)  $\log_2 x - \log_x 8 = 2$   
 (ε)  $\log_4(2^x + 8^x) + \log_4(2^{2-x} - 2) = 1$   
 (στ)  $\log_2 x = \log_4\left(\frac{2-x}{3}\right)$   
 (ζ)  $9^{\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log\sqrt{3}} = 0$   
 (η)  $(4^{\eta\mu x})^{\sigma\nu\nu x} = \sqrt{2\sqrt{2}}$   
 (θ)  $5 \cdot 5^{\sigma\nu\nu^2 x} \cdot 5^{\sigma\nu\nu^4 x} \cdot 5^{\sigma\nu\nu^6 x} \dots = 25$

## ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

25. Να επιλύσετε τρίγωνο ABΓ όταν δίνονται:

(α)  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $\beta = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $E = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

(β)  $\alpha = 2\beta$ ,  $\gamma = 7\sqrt{3} \text{ cm}$  και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$

(γ)  $\alpha=2\beta$ ,  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$  και  $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$

26. Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση  $E = \beta\gamma\eta\mu^2\left(\frac{A}{2}\right)$ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

27. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ.

(α) Να δείξετε ότι:  $(\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B)^2 + (\eta\mu A - \eta\mu B)^2 = 4\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2}$ .

(β) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση:  $\sigma\upsilon\nu(A + B) + \sigma\upsilon\nu(A - B) = 0$ , να δείξετε ότι το ABΓ είναι ορθογώνιο.

28. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

(α)  $\frac{\eta\mu 8\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 8\alpha} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu 8\alpha}{\eta\mu 8\alpha} = \frac{2}{\varepsilon\varphi 4\alpha}$

(β)  $\varepsilon\varphi^2 3\omega + \sigma\varphi^2 3\omega = \frac{6+2\sigma\upsilon\nu 12\omega}{1-\sigma\upsilon\nu 12\omega}$

(γ)  $\frac{1+\eta\mu 2\theta - \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{1+\eta\mu 2\theta - \sigma\upsilon\nu 2\theta} = \sigma\varphi\theta$

(δ)  $\frac{\eta\mu 6\alpha + \eta\mu 4\alpha}{\sigma\upsilon\nu 4\alpha - \sigma\upsilon\nu 6\alpha} = \sigma\varphi\alpha$

(ε)  $\frac{\eta\mu 4x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x}{\sigma\upsilon\nu 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x} = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 x}{2\varepsilon\varphi x}$

29. Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu(x - 30^\circ) = \frac{1}{2}$ , στο διάστημα  $[0^\circ, 180^\circ]$ .

30. Να λύσετε την εξίσωση  $2\sigma\upsilon\nu^2 x - 5\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$  στο διάστημα  $[0, \pi]$ .

31. (α) Να αποδείξετε ότι  $\frac{\eta\mu\theta + \eta\mu 3\theta - \eta\mu 2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu 3\theta - \sigma\upsilon\nu 2\theta} = \varepsilon\varphi 2\theta$

(β) Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{3(\eta\mu\theta + \eta\mu 3\theta - \eta\mu 2\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu 3\theta - \sigma\upsilon\nu 2\theta} - 2\sigma\upsilon\nu 2\theta = 0$  στο διάστημα  $[0, \pi]$ .